

## Contrats dérivés indiciels sur défaut : tranches de pertes et tarification des corrélations de risque de crédit<sup>1</sup>

*Les tranches standardisées de pertes reposant sur des contrats indiciels sur défaut d'emprunteur (CID) améliorent la liquidité du marché des corrélations de risque de crédit. Bien qu'en progrès, la modélisation quantitative de ces corrélations reste complexe et peu développée.*

JEL : G12, G13, G14.

Depuis quelques années, des instruments liquides, et plus particulièrement les tranches de contrats indiciels sur défaut d'emprunteur (CID), autorisent des transactions sur les corrélations de risque de crédit. Ces tranches permettent aux investisseurs (vendeurs de protection de crédit) de s'exposer envers des segments précis de la distribution des pertes des CID. Elles ont chacune une sensibilité propre aux corrélations de risque de crédit entre les signatures représentées dans l'indice. Elles ont l'avantage d'une grande liquidité, essentiellement due à leur standardisation, mais aussi à la liquidité des contrats sur défaut d'emprunteur individuel (CDE) et des CID. À l'inverse, les CID sur indice d'obligations d'entreprises sont peu négociés, peut-être parce que ce type de dette est moins liquide.

La standardisation des tranches CID pourrait constituer une étape marquante vers des marchés plus complets. Les corrélations ont toujours formé une composante essentielle du risque de crédit lié à des portefeuilles, mais il n'existait pas, jusqu'ici, de produits standardisés pour les transférer entre individus et institutions. Les tranches d'indice comblent ainsi une lacune.

Le présent article étudie les tranches CID. La première section présente ces instruments, en s'attachant aux mécanismes en jeu et à l'aspect liquidité. Il aborde ensuite la tarification de ces tranches, en examinant comment ces titres permettent des transactions sur les corrélations de risque de crédit.

---

<sup>1</sup> Nous sommes redevables à JPMorgan Chase des données communiquées, et notamment à Rishad Ahluwalia, Jakob Due et Mike Harris, de JPMorgan Chase, pour des discussions fort utiles. Nous tenons à remercier Henrik Baun, Claudio Borio, Ingo Fender, Frank Packer et Eli Remolona pour leurs précieux commentaires et Marian Micu pour son assistance technique. Les points de vue exprimés dans cet article sont ceux des auteurs et ne reflètent pas nécessairement ceux de la BRI.

## Contrats dérivés sur défaut : caractéristiques et liquidité

Afin de comprendre les avantages procurés par les tranches CID pour négocier les corrélations de risque de crédit, il convient tout d'abord d'en connaître la composition, et donc la structure des CID ainsi que le fonctionnement d'un CDE.

### CDE

Un CDE est un contrat d'assurance couvrant le risque de défaut d'une signature. L'acheteur de protection verse au vendeur une prime sur la durée du contrat. Suite à un incident de crédit prédéterminé, il est indemnisé par le vendeur pour sa perte liée à cet incident de crédit<sup>2</sup>.

Les CDE forment les éléments de base

Deux raisons expliquent la liquidité accrue des CDE par rapport à la plupart des obligations d'entreprises. Tout d'abord, ils sont plus standardisés. Ainsi, les incidents qui déclenchent l'indemnisation sont désormais clairement fixés dans les définitions de l'ISDA (ISDA, 2003)<sup>3</sup>, tout comme l'est la méthode de règlement<sup>4</sup>. Ensuite, avec les CDE, les intervenants peuvent prendre des positions longues sur risque de crédit sans paiement, mais aussi des positions courtes plus facilement et à un moindre coût.

### CID

L'acheteur d'une tranche CID s'assure contre le risque de défaut sur le panier de débiteurs représentés dans l'indice sous-jacent. Un CID diffère légèrement d'un CDE, en ce sens que l'acheteur est implicitement contraint de payer la même prime sur tous les émetteurs couverts. De plus, il n'ouvre droit à indemnisation qu'en cas de faillite ou de défaut de paiement<sup>5</sup>. Lorsqu'un incident de crédit se produit, l'emprunteur est retiré de l'indice et le contrat se poursuit (avec un montant notionnel réduit) jusqu'à son échéance.

La liquidité des CID est favorisée par : 1) l'apparition d'indices de référence largement acceptés, qui rassemblent les CDE les plus liquides et bénéficient de services de tenue de marché dans le monde entier ; 2) un zonage géographique, une composition relativement stable en termes de secteurs ainsi que de notation, et des échéances standardisées ; 3) l'offre de deux formats de contrat. Nous allons étudier tour à tour chacun de ces éléments.

La liquidité des CID est favorisée par...

---

<sup>2</sup> Parmi les descriptions des CDE : Anson *et al.* (2003) ; O'Kane, Naldi *et al.* (2003).

<sup>3</sup> Les incidents de crédit sont : faillite, défaut de paiement, répudiation et restructuration importante de la dette (y compris accélération des remboursements).

<sup>4</sup> Les remboursements peuvent s'effectuer en numéraire (l'acheteur de protection reçoit le pair de l'actif de référence minoré de son prix de défaut) ou en physique (l'acheteur livre le titre en défaut au vendeur, contre versement du pair en numéraire).

<sup>5</sup> Cela équivaut à l'exclusion des restructurations de dette (XR) comme incident de crédit dans les CDE. ISDA (2003) décrit les clauses relatives à la documentation. Voir O'Kane, Pedersen et Turnbull (2003) pour une discussion des pratiques habituelles sur les marchés, ainsi que Packer et Zhu (2005).

...la création d'indices de référence...

Premièrement, les principaux CID (tableau 1) sont désormais regroupés dans une seule famille, sous les appellations DJ CDX (Amérique du Nord et économies émergentes) et DJ iTraxx (Europe et Asie)<sup>6</sup>. Leur composition est décidée par les courtiers participants en fonction de la liquidité de chaque CDE, c'est-à-dire les signatures les plus échangées qu'ils comprennent. Une fois formé, l'indice reste inchangé sur sa durée de vie, sauf en cas de défaut d'un débiteur, qui en est retiré. Il est cependant révisé tous les six mois et l'indice recomposé sert de sous-jacent aux nouveaux CID.

...régionaux et sectoriels...

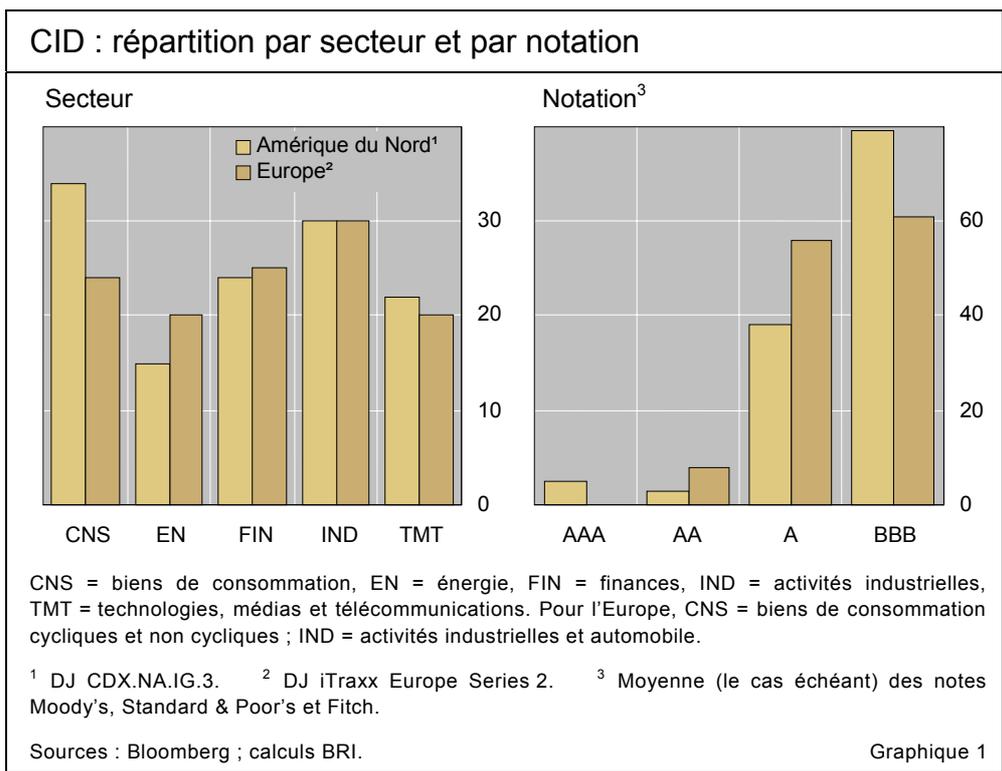
Deuxièmement, des indices ont été créés pour les principales monnaies, les signatures de qualité investissement/haut rendement et les principaux

Contrats indiciaires sur défaut – CID <sup>1</sup>						
Par région						
	Amérique du Nord	Europe	Japon	Asie hors Japon	Australie	Économies émergentes
Indices	CDX.NA.IG (125) CDX.NA.HY (100)	iTraxx Europe (125) iTraxx Corporate (52) <sup>4</sup> iTraxx Crossover (30) <sup>5</sup>	iTraxx CJ (50) <sup>2</sup>	iTraxx Asia (30)	iTraxx Australia (25)	CDX.EM (14) <sup>3</sup>
Sous-indices	Finances (24) Biens de consommation (34) Énergie (15) Activités industrielles (30) TMT (22) HiVol (marge élevée) (30) B (44) BB (43) HB (30)	Finances (15) Automobile (10) Biens de consommation cycliques (15) Biens de consommation non cycliques (15) Énergie (20) Activités industrielles (20) TMT (20) HiVol (marge élevée) (30)	Finances (10) Biens d'équipement (10) Tech (10) HiVol (marge élevée) (10)	Corée (8) Grande Chine (9) <sup>6</sup> Reste de l'Asie (13) <sup>7</sup>	Néant	Néant

<sup>1</sup> Les anciennes générations des indices DJ Trac-x et iBoxx continuent de s'échanger. Ce tableau synthétise la composition des séries les plus récentes, DJ CDX et DJ iTraxx, résultant de la fusion des familles DJ Trac-x et iBoxx. Entre parenthèses : nombre de signatures sous-jacentes. <sup>2</sup> Maximum de 10 signatures dans un secteur donné. <sup>3</sup> Emprunteurs souverains uniquement : Afrique du Sud, Brésil, Bulgarie, Colombie, Corée, Malaysia, Mexique, Panama, Pérou, Philippines, Roumanie, Russie, Turquie et Venezuela. <sup>4</sup> Signatures non financières les plus importantes et les plus liquides de l'indice iBoxx EUR Corporate. <sup>5</sup> Signatures non financières les plus liquides notées BBB/Baa3 ou moins et assorties de perspectives négatives. <sup>6</sup> Chine, Hong-Kong RAS et Taiwan (Chine), avec au moins deux signatures de chaque composante. <sup>7</sup> Inde, Malaysia, Philippines, Singapour et Thaïlande.

Tableau 1

<sup>6</sup> Deux familles d'indices concurrentes (Trac-x et iBoxx), soutenues par des courtiers différents, avaient été lancées en 2003. L'an dernier, elles ont été fusionnées pour former les nouveaux indices, administrés par Dow Jones.



secteurs. Pour les titres de qualité investissement, les indices larges nord-américain (CDX.NA.IG) et européen (iTraxx Europe) sont les plus échangés ; ils comportent chacun 125 signatures, assorties d'une pondération égale. Il existe aussi des indices spécialisés sur certains secteurs, sur les débiteurs présentant un fort risque systématique (bêta élevé), sur les entreprises de qualité spéculative ainsi que sur d'autres zones, comme le Japon, l'Asie (hors Japon), l'Australie et certaines économies émergentes. Le graphique 1 présente la distribution sur les secteurs et les notations des dernières versions de CDX.NA.IG et iTraxx Europe. Les CID émis sur les grands indices ont une échéance de 5 ou 10 ans.

Troisièmement, il existe deux formats de CID : financés et non financés, pour répondre aux préférences des investisseurs concernant la formule de financement et l'exposition au risque de contrepartie. Un contrat non financé est simplement un CDE sur plusieurs signatures (sans immobilisation de fonds). Un contrat financé est un titre pour lequel, à l'origine, l'acheteur de protection reçoit du vendeur un panier de sûretés et lui verse un montant notionnel, en sus de la prime trimestrielle. Dans le premier cas, l'acheteur est exposé au risque de contrepartie, tandis que dans le second, il est uniquement exposé à une détérioration du crédit lié au panier<sup>7</sup>.

L'avantage de liquidité de ces instruments se traduit par un écart de cours acheteur/vendeur assez faible, du moins sur les contrats les plus échangés : 0,5–4 points de base (pb), par exemple, pour les contrats à 5 ans non financés CDX.NA.IG. À titre de comparaison, l'écart sur les grands indices de titres de

...ainsi que par l'existence de deux formats de contrat

Faible écart de cours acheteur/vendeur

<sup>7</sup> En cas de défaut dans l'indice, l'acheteur de la protection vend la sûreté pour recouvrer ses pertes sur le CID.

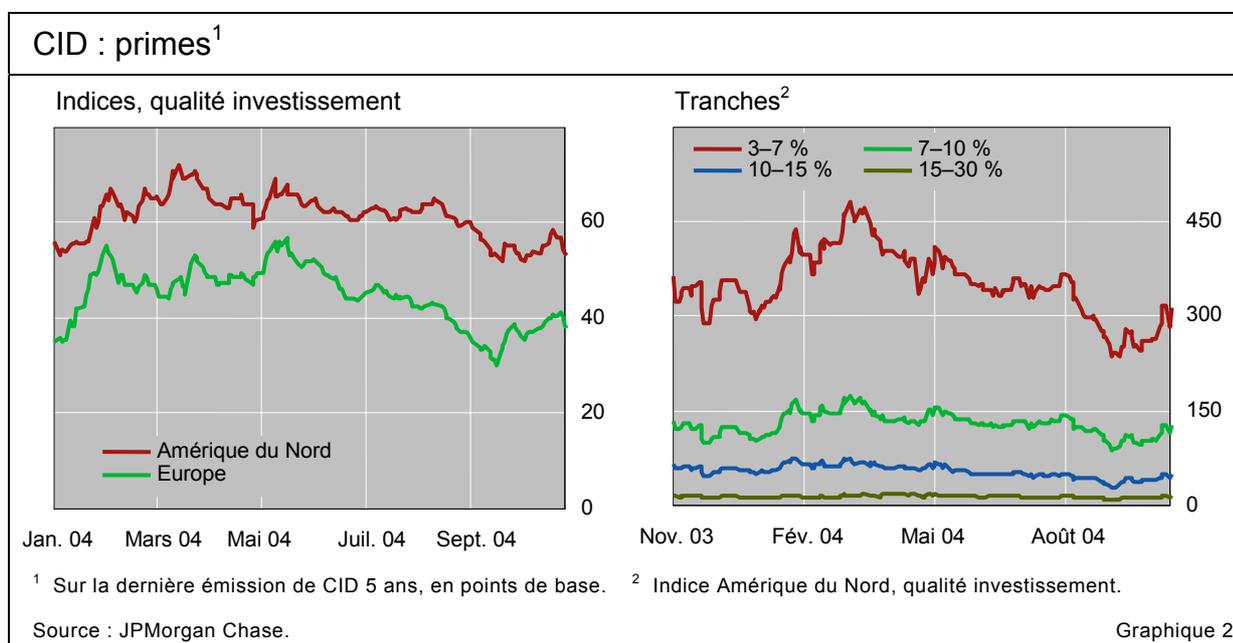
qualité investissement atteint en moyenne environ 62 pb en Amérique du Nord et 45 pb en Europe depuis janvier 2004 (graphique 2, cadre de gauche)<sup>8</sup>.

### Tranches CID

Par rapport aux autres TGC, les tranches CID sont standardisées et plus liquides

Les tranches CDI sont des titres garantis par des créances (TGC) synthétiques reposant sur un CDI ; chaque tranche correspond à un segment particulier de la distribution des pertes du CID<sup>9</sup>. Leur principal avantage par rapport aux TGC réside dans leur standardisation – qui s'applique au panier d'emprunteurs sous-jacents et à la structure (largeur) des tranches.

La standardisation favorise la liquidité sur le marché secondaire. Pour les autres TGC, le développement d'un marché secondaire liquide se fait encore attendre, essentiellement du fait de la nature extrêmement individualisée de la plupart de ces titres<sup>10</sup>.



<sup>8</sup> Au montage, la prime fixe du CID est établie à un niveau globalement égal à la moyenne de la prime des CDE pour les signatures représentées dans l'indice. À mesure que le temps passe, le CID prend une valeur positive pour l'acheteur de protection lorsque la prime moyenne sur chaque emprunteur s'élève par rapport à la prime fixe. Dans ce cas, les nouveaux acheteurs de protection paient au vendeur un montant égal à cette différence (et inversement si la prime moyenne est inférieure à la prime fixe).

<sup>9</sup> Un TGC est un produit financier structuré permettant de vendre à des investisseurs le risque de crédit lié à un panier d'actifs sous forme de titres émis en tranches hiérarchisées (structurées) par ordre de qualité, avec habituellement une ou plusieurs tranches de qualité investissement et une tranche inférieure (de premières pertes). Voir CSFM (2005) pour plus de détails sur les TGC et leurs aspects économiques, et Gibson (2004) pour une discussion des risques des TGC synthétiques.

<sup>10</sup> Ces deux dernières années, ce sont les TGC dits à tranche unique qui ont connu l'expansion la plus forte. Ces TGC « sur mesure » sont conçus pour répondre aux souhaits précis d'un investisseur. Les forces du marché semblent ainsi tendre vers les deux extrêmes : standardisation, favorable à une négociation active, et individualisation, conçue pour des titres destinés à être conservés jusqu'à l'échéance.

Des tranches ont été émises sur plusieurs indices, bien que l'activité se concentre jusqu'ici sur le CDX.NA.IG<sup>11</sup>, qui sert de support à cinq tranches. La tranche inférieure (*equity*) absorbe les premiers 3 % de pertes sur défaut. En cas de défaut pendant la durée de vie du contrat, l'investisseur dans une tranche inférieure est contraint de payer à sa contrepartie un montant égal aux pertes sur défaut (différence entre le pair et le prix recouvré sur l'actif qui a fait défaut) à concurrence de 3 % du total de l'indice. La tranche suivante (*mezzanine*) absorbe les pertes comprises entre 3 % et 7 % ; elle est donc entièrement protégée par la tranche inférieure pour les pertes allant jusqu'à 3 %. Au-delà, les pertes (7–10 % et 10–15 %) sont absorbées par les tranches supérieures (*senior*). La tranche de première qualité (*super senior*) couvre les pertes s'inscrivant dans la fourchette de 15–30 %<sup>12</sup>.

Les tranches CID ciblent des segments de la distribution des pertes sur défaut

Pour supporter ce risque de pertes, les investisseurs reçoivent des acheteurs de protection une prime trimestrielle proportionnelle à l'encours notionnel effectif de la tranche<sup>13</sup>. Sur les tranches intermédiaires et supérieures, il n'y a pas de paiement initial. En revanche, les acheteurs de tranches inférieures paient au montage un pourcentage du montant notionnel initial du contrat ainsi qu'une prime fixe de 500 pb<sup>14</sup> ; du fait de ce paiement initial (relativement important), qui modifie les flux de trésorerie, l'exposition de l'investisseur au moment d'occurrence des défauts est différente. Les cotations des primes sur les tranches intermédiaires et supérieures sont présentées au graphique 2 (cadre de droite)<sup>15</sup>.

## Négociation des corrélations de risque de crédit : tarification des tranches

Les corrélations de risque de crédit entre signatures sous-jacentes influent beaucoup sur le risque des tranches CID. Cette forte sensibilité transparaît nettement dans la tarification des tranches. Outre leur liquidité supérieure, ces instruments offrent donc un moyen relativement efficace de négocier cette forme de risque.

Les tranches CID sont sensibles aux corrélations de risque de crédit

---

<sup>11</sup> Creditflux fait état d'un volume de transactions de \$10,2 milliards au deuxième trimestre 2004, dont 82 % pour iBoxx CDX.NA.IG Series 2 et Trac-x NA cumulés.

<sup>12</sup> Il n'existe actuellement pas de contrats procurant une assurance contre les pertes supérieures à 30 % sur l'indice.

<sup>13</sup> Le montant notionnel effectif correspond au montant notionnel initial minoré de toutes pertes sur défaut supportées par la tranche (avec un plancher à zéro).

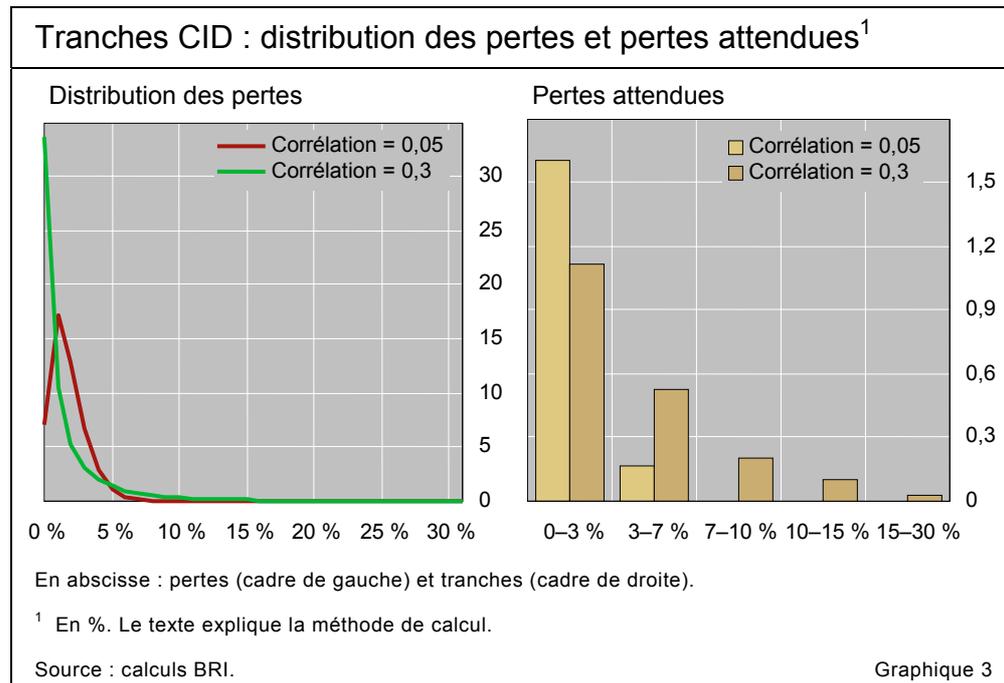
<sup>14</sup> Il est possible de convertir un contrat avec paiement initial en contrat à prime fixe. Il faut pour cela diviser le montant de ce paiement par la durée (risque) de la tranche et ajouter la prime fixe originale. Ainsi, une tranche inférieure avec versement initial de 37,5 %, marge fixe de 500 pb et durée (risque) de 3,75 équivaut à un contrat avec marge fixe de  $(37,5 \times 100 / 3,75) + 500 \text{ pb} = 1\,500 \text{ pb}$ . Voir O'Kane et Sen (2003) pour une analyse des conventions de cotation avec paiement initial ou prime fixe.

<sup>15</sup> Les écarts de cours acheteur/vendeur s'établissent à 1–2 pb pour la majeure partie de la tranche supérieure et à 5–10 pb pour les tranches intermédiaires, alors qu'ils atteignent 15–70 pb pour la tranche inférieure.

Afin d'illustrer l'importance des corrélations de risque de crédit sur le prix des tranches, prenons le cas d'une tranche d'échéance 5 ans sur un CID regroupant 125 signatures aux caractéristiques analogues à la note de crédit moyenne du CDX.NA.IG Series 3<sup>16</sup>. Le cadre de gauche du graphique 3 illustre la distribution du taux de pertes sur cinq ans, en pourcentage de la taille de la tranche, de l'échelon inférieur (*equity*) à l'échelon intermédiaire (*mezzanine*). Le cadre de droite montre les pertes attendues, en pourcentage de l'indice total, pour chaque tranche. Il apparaît clairement que les pertes, relatives et absolues, diminuent lorsqu'on monte vers les tranches supérieures. En l'occurrence, les pertes attendues sur la tranche inférieure représentent 40–50 % environ du montant notionnel.

La tarification des tranches CID tient surtout compte des corrélations des moments de défaut

D'après cet exemple, le prix de marché d'une tranche CID dépend de la distribution de la probabilité conjointe de pertes sur défaut pour les signatures sous-jacentes de l'indice. De manière générale, cette distribution incorpore les corrélations entre niveaux de probabilité de défaut individuel et entre moments de défaut individuel. De plus, la distribution vraie des pertes intègre également les corrélations entre pertes en cas de défaut et niveaux de probabilité de défaut (les pertes ont tendance à être plus importantes lorsque, en période de récession par exemple, le risque global de défaut est plus élevé) et les corrélations entre pertes en cas de défaut et moments de défaut (les pertes



<sup>16</sup> Pour calculer la distribution des pertes, nous utilisons un modèle copule gaussienne à un facteur (voir *infra*) et nous supposons des probabilités de défaut sur 5 ans identiques (2,97 %), des taux de recouvrement constants (40 %) et des corrélations des moments de défaut par paire constantes et identiques (0,05 ou 0,3). Le taux de défaut est estimé à partir des données Moody's pour les entreprises des États-Unis notées Baa sur la période 1983–2003. Le taux de recouvrement correspond à la moyenne pour les obligations non garanties d'entreprises américaines de qualité qui ont fait défaut. (Les valeurs retenues pour les corrélations des moments de défaut s'inscrivent globalement dans la fourchette utilisée par les agences de notation.)

## Tarification des tranches CID

La prime sur une tranche CID représente la marge, payée par l'acheteur de protection, pour laquelle la valeur actualisée attendue du coût du défaut que supportera le vendeur de protection (« volet protection ») est égale à la valeur actualisée attendue de l'investissement dans la tranche (« volet prime »). Le volet prime correspond à la valeur actualisée des primes payées au vendeur par l'acheteur. Les contrats précisent  $M$  échéances trimestrielles,  $t = t_1, t_2, \dots, t_M$ , auxquelles l'acheteur paie le vendeur. Ces paiements n'interviennent que tant que le montant notionnel effectif (incertain) de la tranche à l'instant  $t_i$ , noté  $N(t_i)$ , est positif. On suppose également que les investisseurs actualisent les flux de revenus attendus à l'aide des facteurs d'actualisation  $A(0, t_i)$  (incertains). Pour la prime  $P$  sur la tranche, la valeur actualisée attendue du volet prime est<sup>①</sup> :

$$V_{\text{prime}} = P \cdot E \left[ \sum_{i=1}^M A(0, t_i) \cdot N(t_i) \right]$$

La taille attendue des tranches dépend du nombre et du moment des éventuels défauts, ainsi que de leur coût anticipé (c'est-à-dire des taux de recouvrement)<sup>②</sup>. La valeur actualisée du volet prime est inférieure si : la prime est faible ; le taux de recouvrement est bas ; les pertes sur défaut interviennent rapidement. La valeur actualisée attendue du volet protection est<sup>③</sup> :

$$V_{\text{protection}} = E \left[ \sum_{i=1}^M A(0, t_i) \cdot (N(t_i) - N(t_{i-1})) \right]$$

La valeur actualisée du volet protection est inférieure si : la taille de la tranche ne varie pas ; le taux de recouvrement est élevé ; les défauts interviennent tardivement. On obtient la prime sur la tranche en résolvant  $V_{\text{prime}} = V_{\text{protection}}$  pour  $P$  :

$$P = \frac{E \left[ \sum_{i=1}^M A(0, t_i) \cdot (N(t_i) - N(t_{i-1})) \right]}{E \left[ \sum_{i=1}^M A(0, t_i) \cdot N(t_i) \right]}$$

### Application

Comme le montrent les équations ci-dessus, deux facteurs clés sont nécessaires à la détermination de  $P$  : taille effective future des tranches et facteurs d'actualisation. On peut établir ces derniers par les méthodes utilisées pour d'autres instruments financiers (Rebonato (2002)). Pour évaluer la taille future des tranches, plusieurs éléments doivent être connus : 1) pertes en cas de défaut ; 2) nombre de défauts ; 3) moment des défauts ; toutes ces grandeurs sont incertaines, et il convient donc de les estimer à l'avance.

Concernant les pertes en cas de défaut (soit un moins le taux de recouvrement), une approche simple consiste à supposer que le taux de recouvrement est constant et correspond au taux de recouvrement historique moyen sur obligations non garanties d'entreprises américaines de qualité (habituellement environ 40 %). Il est également possible d'estimer le taux de recouvrement à partir des primes sur CDE.

Les probabilités de défaut de chaque signature peuvent être directement estimées à partir des primes sur CDE (une hypothèse de taux de recouvrement est cependant nécessaire dans ce cas). Elles peuvent également être calculées indirectement à partir du cours des actions (par exemple, fréquences de défaut attendues calculées par Moody's KMV).

<sup>①</sup> En pratique, lorsque des défauts se produisent entre deux échéances, les vendeurs reçoivent à l'échéance suivante un montant fondé sur la taille effective de la tranche avant le défaut. Il convient de noter que tout paiement initial sur la tranche inférieure peut être inclus dans la valeur actualisée du volet prime par ajout d'une constante.

<sup>②</sup> Les anticipations sont mesurées dans une hypothèse de neutralité à l'égard du risque (elles sont ajustées en fonction du risque). <sup>③</sup> Dans l'hypothèse où les acheteurs de protection reçoivent une indemnisation à l'échéance suivant le défaut.

Le moment des défauts pour les  $N$  signatures sous-jacentes sur la durée de vie du contrat peut se calculer à partir d'une distribution de probabilités collectives des moments de défaut. Ces probabilités n'étant pas connues, il est courant de supposer que les moments de défaut suivent une distribution normale multivariée à  $N$  dimensions – la copule gaussienne (Nelsen (1999), Li (2000), Cherubini *et al.* (2004)).

Dans un modèle de copule gaussienne à **un facteur**, les corrélations des moments de défaut sont tenues égales et constantes pour toutes les signatures. Cela revient à supposer qu'il y a une correspondance directe entre une variable aléatoire latente  $X_i$  et les moments de défaut, l'évolution de  $X_i$  étant donnée par :

$$X_i = \sqrt{\rho} \cdot M + \sqrt{1-\rho} \cdot Z_i$$

où  $M$  est une variable aléatoire à distribution normale,  $Z_i$  une série de variables aléatoires à distribution normale et non corrélées entre elles et  $-1 < \rho < 1$  la corrélation constante par paire entre moments de défaut (voir Hull et White (2004) pour de plus amples détails). Dans ce modèle de copule gaussienne,  $X_i$  est la valeur des actifs détenus par l'entité  $i$  ; l'entité  $i$  fait défaut si la valeur de ses actifs passe au-dessous d'un seuil. Cette approche rappelle un modèle de type Merton, où l'option de non-remboursement de la dette est exercée lorsque la valeur des actifs descend jusqu'à un seuil. Avec cette interprétation,  $M$  peut être considéré comme le seul facteur de risque commun, tandis que les  $Z_i$  sont  $N$  facteurs de risque idiosyncrasique influant sur la valeur des actifs des entreprises, et donc sur les moments de défaut. Le paramètre de corrélation  $\rho$  peut être estimé à partir des corrélations des rendements des actions, habituellement de l'ordre de 0-30 %.

peuvent être plus importantes lorsque les défauts s'accumulent, par exemple quand un secteur est largement frappé sur un bref laps de temps).

Jusqu'à présent, la tarification des tranches CID a surtout tenu compte des conséquences des corrélations des moments de défaut (encadré). Le modèle copule gaussienne à un facteur est devenu la norme du marché pour cette tarification, à l'instar du modèle Black-Scholes pour les options. Le terme « copule » indique que ce genre de modèle « apparie » les distributions de probabilité de défaut sur chaque signature pour former une distribution conjointe (Nelsen (1999)). La copule gaussienne à un facteur suppose des corrélations des moments de défaut par paire constantes et identiques sur toutes les signatures, des moments de défaut à distribution normale et une distribution normale des probabilités de défaut conjointes. Grâce à ces simplifications, ce modèle est relativement facile à utiliser pour la tarification, d'où son succès.

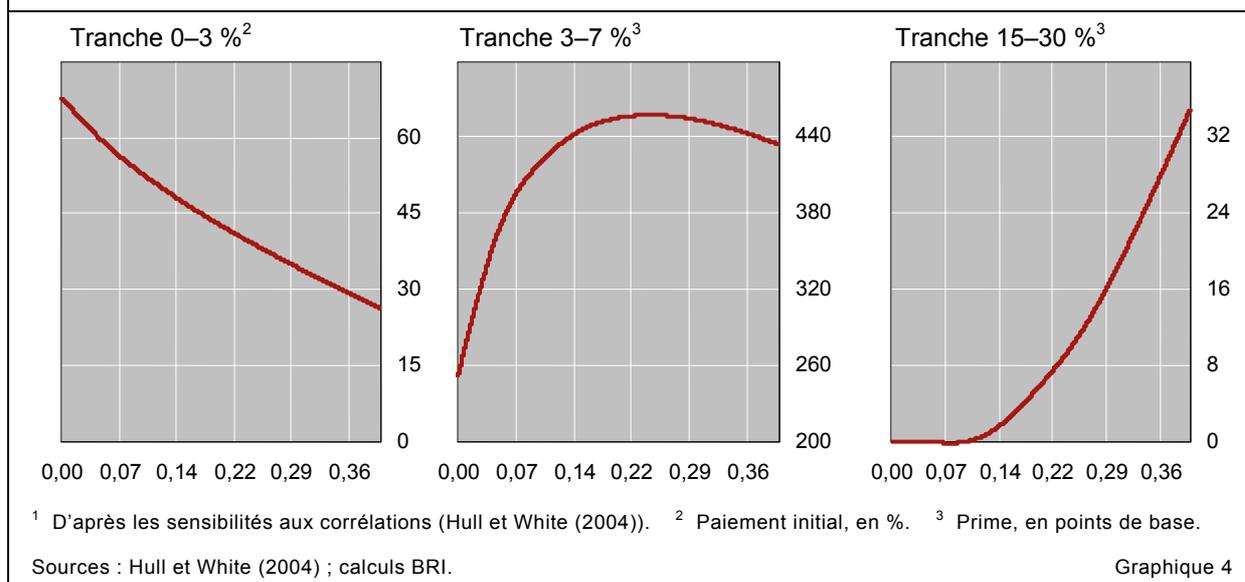
#### *Corrélations des moments de défaut et tarification des tranches*

Des corrélations élevées suggèrent une concentration accrue des défauts

Le graphique 3 montre que la corrélation des moments de défaut influe sur le niveau de risque de chaque tranche d'indice. On voit dans le cadre de gauche que, plus elle s'accroît, plus les probabilités de taux de pertes – très réduits ou très importants, suivant la tranche – augmentent. Une comparaison des deux cas extrêmes, quoique irréalistes, l'illustre clairement.

Avec une corrélation nulle, la probabilité que zéro emprunteur (sur 125) fasse défaut sur une période de cinq ans est  $(100 - 2,97)^{125} = 2,31$  % (2,97 est le pourcentage de défaut historique moyen sur cinq ans des entreprises

## Tranches CID : sensibilité de la tarification à la corrélation des moments de défaut<sup>1</sup>



notées Baa). Avec une corrélation égale à un (c'est-à-dire si le portefeuille peut être considéré comme un crédit unique), la probabilité que zéro signature fasse défaut atteint 97,03 %. Pourtant, l'indice pourrait enregistrer des pertes égales à un moins le taux de recouvrement ( $1 - 0,4$ ) avec une probabilité de 2,97 %, soit des pertes attendues de 1,78 %<sup>17</sup>. Le cadre de droite du graphique 3 indique que les pertes anticipées sur la tranche inférieure sont plus élevées avec une corrélation faible, ce qui n'est pas le cas des tranches intermédiaires et supérieures : sur ces dernières, les pertes attendues sont plus importantes en présence d'une corrélation élevée.

Le risque lié à chaque tranche, comme sa tarification, varie avec la corrélation des moments de défaut. C'est ce qui apparaît dans le graphique 4, qui représente le paiement initial sur la tranche inférieure (calculé à l'aide du modèle) ainsi que les primes sur les tranches intermédiaires et de première qualité en fonction de la corrélation des moments de défaut<sup>18</sup>. Prenons la tranche inférieure. Une concentration accrue des défauts ne produit guère d'impact négatif sur la tarification, car quelques défauts suffisent pour engendrer des pertes substantielles. En même temps, une corrélation des moments de défaut plus élevée renforce la probabilité d'une absence de défaut. Le paiement initial diminue donc à mesure qu'augmente la corrélation des moments de défaut. En revanche, la tarification de la tranche supérieure reflète sa plus grande exposition au risque de pertes lorsque les défauts sont plus concentrés. Contrairement à celle des tranches inférieure et supérieure, la tarification de la tranche intermédiaire n'est généralement pas une fonction

Lorsque la corrélation s'accroît, la prime diminue sur la tranche inférieure...

...et augmente sur la tranche supérieure

<sup>17</sup> Augmenter la corrélation des moments de défaut revient à rendre la probabilité de défaut aléatoire, mais avec la même probabilité moyenne de défaut. Il convient de noter qu'une distribution préservant ainsi la moyenne suppose un taux de survie collective moyen supérieur en raison de la convexité de la distribution de la probabilité de survie collective. Pour une discussion plus poussée, voir Lando (2004).

<sup>18</sup> La tarification des tranches se fonde sur Hull et White (2004).

monotone de la corrélation des moments de défaut. En présence de corrélations élevées comme faibles, il existe une forte probabilité que cette tranche ne soit pas affectée ; pour les niveaux de corrélation intermédiaires, toutefois, des pertes importantes sont probables.

#### *Prix de marché et corrélations implicites des moments de défaut*

Les prix de marché sont révélateurs des corrélations des moments de défaut

À partir des prix de marché des tranches CID, on peut déduire l'opinion du marché sur les corrélations des moments de défaut, en employant un modèle de tarification (copule gaussienne à un facteur) paramétré sur toutes les variables nécessaires, à l'exception de cette corrélation (corrélation des moments de défaut constante par paire). Il est possible de parvenir à une corrélation implicite à l'aide des cotations du marché<sup>19</sup>. C'est ce qu'illustre le cadre de gauche du graphique 5, qui représente, sur la durée, les corrélations implicites des moments de défaut pour les tranches CID.

Les corrélations implicites des moments de défaut se caractérisent par un « sourire »...

Ce cadre de gauche illustre l'une des énigmes observées dans les cotations du marché : le « sourire des corrélations »<sup>20</sup>. Celui-ci indique que, lorsqu'on utilise une copule gaussienne à un facteur, la prime sur la tranche intermédiaire implique (habituellement) une corrélation des moments de défaut inférieure à celle des primes sur les tranches inférieure et supérieure – pour lesquelles le marché semble tabler sur une plus forte concentration des défauts. Or, si le modèle gaussien à un facteur constitue bien la description correcte de l'exposition collective au défaut, la même corrélation implicite devrait alors être déduite pour toutes les tranches.

...et une asymétrie

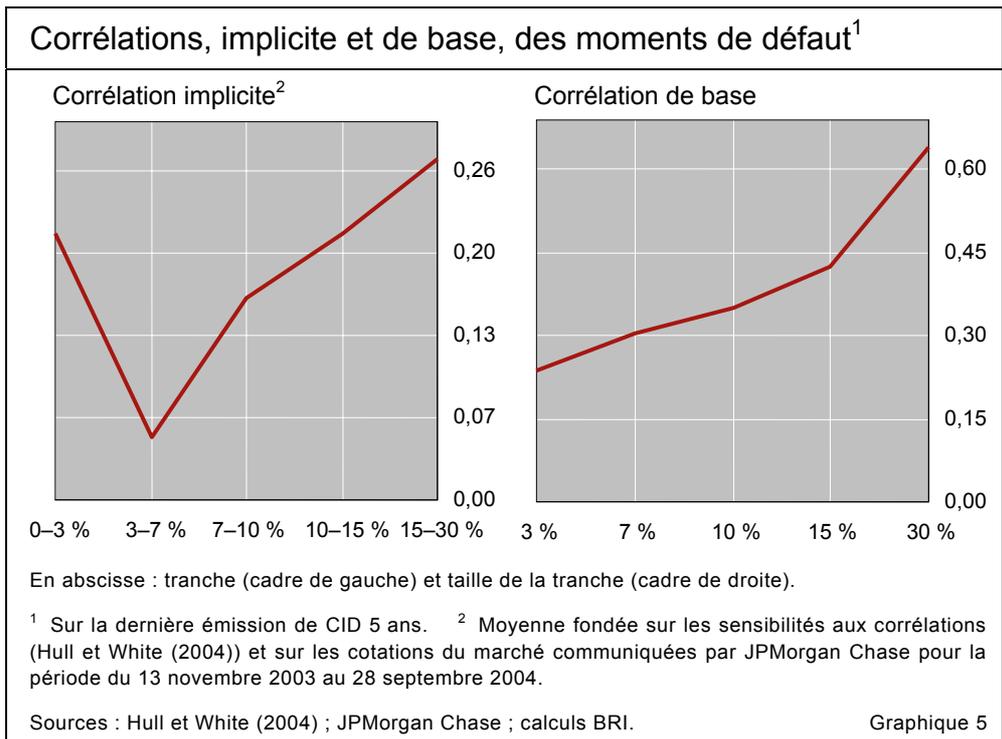
Le cadre de droite du graphique 5 illustre un autre point déduit des cotations : l'« asymétrie des corrélations ». Il représente la corrélation de base induite par le marché par rapport à la limite supérieure pour chaque tranche. Par exemple, dans le cas du CDX.NA.IG, la corrélation de base pour l'intervalle de 0–10 % se définirait comme la valeur pour laquelle le prix de cette première tranche de pertes synthétique est égal aux valeurs du marché combinées pour les tranches 0–3 %, 3–7 % et 7–10 %. Pour l'acheteur de protection, cette corrélation de base peut être interprétée comme définissant la protection assurée jusqu'à ce qu'un niveau de pertes donné soit atteint. La pente ascendante, ou asymétrie, de cette corrélation de base montre que les prix de marché des tranches CID impliquent que la corrélation des moments de défaut augmente avec la qualité de la tranche. Ce phénomène s'explique par les primes élevées sur les tranches supérieures, du moins par rapport aux faibles pertes attendues sur ces tranches d'après le modèle. Il rappelle la relation positive entre prime de risque et qualité du crédit observée pour les obligations d'entreprises<sup>21</sup>.

---

<sup>19</sup> Les tranches CID sont parfois cotées en termes de corrélation implicite et non de prime.

<sup>20</sup> Le « sourire » des corrélations rappelle celui de la volatilité pour les prix d'exercice déduits des options sur actions à l'aide du modèle de Black-Scholes.

<sup>21</sup> Pour une discussion plus poussée, voir Amato et Remolona (2004).



Il y a plusieurs explications possibles au sourire (et à l'asymétrie) des corrélations<sup>22</sup>. La première tient à la segmentation des investisseurs suivant les tranches et aux divergences d'opinions de ces derniers sur les corrélations. Ainsi, l'avis des vendeurs de protection sur les tranches inférieures (par exemple fonds spéculatifs) peut différer de celui des investisseurs sur les tranches intermédiaires (par exemple banques et maisons de titres) ; mais rien ne justifie que ces avis divergent systématiquement sur les corrélations.

Le sourire des corrélations pourrait refléter la segmentation du marché...

Deuxième possibilité : le sourire reflète l'incertitude des intervenants sur la meilleure méthode pour modéliser les corrélations de risque de crédit. Cela signifie que la tarification des tranches inférieures et supérieures, plus sensibles aux corrélations, intègre une prime de « risque de modèle ». Mais cette hypothèse, qui s'accorde avec la prime relativement importante sur la tranche supérieure, ne cadre pas avec la prime relativement modeste sur la tranche inférieure.

...une incertitude sur les corrélations de risque de crédit...

Troisième explication : bien que le marché des tranches CID ait beaucoup progressé sur l'année écoulée, la tarification reste tributaire des conditions de la demande locale. La corrélation implicite sur la tranche intermédiaire peut indiquer, par exemple, que les banques sont désireuses de vendre une protection sur ce segment de la distribution des pertes de l'indice, peut-être à des fins de couverture dans le cadre d'autres TGC montés par elles, à tranche unique, notamment.

...les conditions de la demande locale...

Quatrièmement, il se peut aussi que les intervenants recourent en fait à des modèles de tarification autres que la copule gaussienne à un facteur, avec, par exemple : 1) des distributions à queue plus épaisse (comme le t de

...ou le recours à des modèles de tarification différents

<sup>22</sup> Voir également Bernard *et al.* (2004).

Student) ; 2) un assouplissement de la restriction des corrélations par paire constantes ; 3) des probabilités de défaut individuel dépendant de facteurs de risque macroéconomiques ; 4) des taux de recouvrement variables sur la durée et corrélés aux moments de défaut et aux probabilités de défaut<sup>23</sup>. Ainsi, le recours à une distribution à queue plus épaisse, qui correspond à une concentration accrue des défauts, augmente le point mort de la prime pour les tranches supérieures et le réduit pour les tranches inférieures. Par ailleurs, une corrélation positive entre pertes en cas de défaut et concentration des moments de défaut ferait baisser le prix des tranches supérieures pour un niveau donné de corrélation des moments de défaut. Dans ce cas, la corrélation implicite déduite à partir des tranches supérieures (dans l'hypothèse d'un taux de recouvrement constant) présenterait un biais à la hausse. Ceci pourrait également expliquer le prix des tranches inférieures, car un taux de recouvrement plus élevé en période de défauts peu nombreux laisserait supposer que cette tranche est plus intéressante.

## Perspectives

Pour des marchés  
CID plus matures...

...il faut améliorer  
la diversification...

...et la modélisation  
du risque de  
crédit...

...afin de refléter  
davantage de  
codépendances  
de risque de crédit

Malgré une croissance alerte, le marché des tranches CID reste relativement restreint. De plus, bien qu'ils offrent davantage d'opportunités de diversification moins coûteuses pour les investisseurs, ces instruments comportent toujours un risque idiosyncrasique, puisqu'ils ne référencent que 125 signatures dans cinq secteurs<sup>24</sup>. Cependant, à mesure que ces marchés vont acquérir une maturité, le nombre de sous-jacents devrait augmenter, ce qui améliorera la diversification. À l'avenir, l'efficacité de la négociation des corrélations de risque de crédit devrait s'en trouver renforcée.

Si l'on veut accroître l'efficacité du marché et éviter une accumulation non maîtrisée des expositions, il importe de développer la modélisation du risque de crédit. Le plus difficile sera d'élaborer des cadres reflétant de manière réaliste les corrélations (Duffie (2004)). Comme nous l'avons vu, la tarification des tranches CID a principalement reposé jusqu'ici sur la modélisation de la corrélation des moments de défaut. En revanche, les corrélations entre probabilités de défaut et pertes en cas de défaut (c'est-à-dire les corrélations de marges de crédit) ont reçu peu d'attention. À n'en pas douter, le développement de modèles plus généraux destinés à mesurer les codépendances de risque de crédit sont en progrès<sup>25</sup>. Certains modèles intègrent désormais les effets de contagion, tenant ainsi compte de l'incidence sur le risque de crédit d'une diminution de la liquidité globale du marché, du défaut de grandes entreprises ou d'influences négatives à l'échelle d'un

<sup>23</sup> L'importance de ces éléments pour la modélisation du risque de crédit a été traitée respectivement par Hull et White (2004), Gregory et Laurent (2004), Duffie et Singleton (2003) et Altman *et al.* (2004).

<sup>24</sup> Pour une discussion sur l'importance du risque idiosyncrasique dans les portefeuilles de crédit, voir Amato et Remolona (2004).

<sup>25</sup> Ces codépendances peuvent également englober les corrélations entre facteurs d'actualisation et risque de crédit.

secteur tout entier<sup>26</sup>. Parmi les défauts qui ont eu de vastes répercussions sectorielles, citons ceux d'Enron et de WorldCom ; de même, l'enquête récemment lancée par le procureur général de New York sur les pratiques des entreprises d'assurances aux États-Unis. À l'avenir, les professionnels et les autorités de surveillance devront concevoir des modèles solides intégrant ces facteurs systématiques et systémiques.

## Bibliographie

- Altman, E. I., B. Brady, A. Resti et A. Sironi (2004) : « The link between default and recovery rates : theory, empirical evidence and implications », *Journal of Business*, à paraître.
- Amato, J. et E. Remolona (2004) : *The pricing of unexpected credit losses*, Banque des Règlements Internationaux, document non publié.
- Anson, M., F. Fabozzi, M. Choudhry et R.-R. Chen (2003) : *Credit derivatives : instruments, applications and pricing*, Wiley Finance.
- Bernard, A., F. Pourmokhtar, B. Jacquard, D. Baum, L. Gibson, L. Andersen et J. Sidenius (2004) : « The Bank of America guide to advanced correlation products », supplément, *Risk*, mai.
- Cherubini, U., E. Luciano et W. Vecchiato (2004) : *Copula methods in finance*, Wiley, New York.
- Collin-Dufresne, P., R. Goldstein et J. Helwege (2003) : *Is credit event risk priced ? Modeling contagion via the updating of beliefs*, Carnegie Mellon University, document non publié.
- Comité sur le système financier mondial (2005) : *The role of ratings in structured finance : issues and implications*, Banque des Règlements Internationaux, Bâle.
- Davis, M. et V. Lo (2001) : « Infectious defaults », *Quantitative Finance*, 1, pp. 382–387.
- Duffie, D. (2004) : « Time to adapt copula methods for modelling credit risk correlation », *Risk*, avril, p. 77.
- Duffie, D. et K. J. Singleton (2003) : *Credit risk : pricing, measurement and management*, Princeton University Press.
- Gibson, M. (2004) : « Understanding the risk of synthetic CDOs », *FEDS Discussion Papers*, n° 2004–36, Conseil des gouverneurs du Système de Réserve fédérale.
- Gregory, J. et J.-P. Laurent (2004) : « In the core of correlation », *Risk*, octobre, pp. 87–91.

---

<sup>26</sup> Voir Davis et Lo (2001) et Collin-Dufresne *et al.* (2003) pour des modèles théoriques de la contagion du risque de crédit. Schönbucher et Schubert (2001) montrent comment certaines catégories de copules plus générales peuvent refléter ces codépendances du risque de crédit.

- Hull, J. et A. White (2004) : « Valuation of a CDO and an n-th-to-default CDS without Monte Carlo simulation », *Journal of Derivatives*, à paraître.
- International Swaps and Derivatives Association (2003) : « ISDA Credit Derivatives Definitions », *Supplements and Commentaries*.
- Lando, D. (2004) : *Credit risk modeling : theory and applications*, Princeton University Press.
- Li, D. (2000) : « On default correlation : a copula function approach », *Journal of Fixed Income*, mars, pp. 43–54.
- Nelsen, R. (1999) : « An introduction to copulas », *Lecture Notes in Statistics*, Springer, Berlin.
- O’Kane, D., M. Naldi, S. Ganapati, A. Berd, C. Pedersen, L. Schloegl et R. Mashal (2003) : « The Lehman Brothers guide to exotic credit derivatives », supplément, *Risk*, novembre.
- O’Kane, D., C. Pedersen et S. Turnbull (2003) : « The restructuring clause in credit default swap contracts », *Fixed income quantitative credit research*, Lehman Brothers, avril.
- O’Kane, D. et S. Sen (2003) : « Up-front credit default swaps », *Quantitative Credit Research Quarterly*, Lehman Brothers, troisième trimestre.
- Packer, F. et H. Zhu (2005) : « Clauses contractuelles et tarification des contrats dérivés sur défaut d’emprunteur », *Rapport trimestriel BRI*, mars.
- Rebonato, R. (2002) : *Modern pricing of interest-rate derivatives*, Princeton University Press.
- Schönbucher, P. et D. Schubert (2001) : *Copula-dependent default risk in intensity models*, Institut de Statistique, Université de Bonn, document non publié.

